半空間における弾性方程式に対するLax-Phillips流散乱理論 (スペクトル・散乱理論とその周辺)

川下, 日和子

数理解析研究所講究録 1255 巻 2002 年 22-31

半空間における弾性方程式に対する Lax-Phillips 流散乱理論[1]
(The Lax-Phillips scattering theory for the elastic equation in the half-space)

筑波大・数　川下　和日子 (Kawashita, Wakako)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

地震波を代表的な例とする弾性波には数種類の異なるタイプの波が存在する。内部を伝わる波としては縦波の P 波と横波の S 波がある。それ以外にも境界を伝わる波として Rayleigh 波等の表面波の存在が知られている。我々は、この表面波の性質に焦点をあて、その特徴を数学的に捉えたいと考えている。そこで表面波そのものの散乱について考察したいというのが本研究の目標である。

表面波の散乱を考えるためには、散乱理論における自由な系としては半空間をとるのが適当と思われる。そこで自由な系として次の問題を考える。$\mathbf{R}^3_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3;\ x_3 > 0\}$ における均一で等方的な弾性方程式について考え、境界での外力は無いものとする。

$$
(1) \quad \begin{cases} (\rho_0 \partial_t^2 - \mathcal{A}_0(\partial_{\mathbf{x}}))\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = 0 & \text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3_+, \\ \mathcal{N}_0(\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = 0 & \text{on } \mathbf{R} \times \partial\mathbf{R}^3_+, \\ \mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}),\ \partial_t \mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) & \text{on } \mathbf{R}^3_+. \end{cases}
$$

上で $\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = {}^t(u_1(t,\mathbf{x}), u_2(t,\mathbf{x}), u_3(t,\mathbf{x}))$ は弾性体の変位を表し、また $\mathcal{A}_0(\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^3 \partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}\mathbf{u})$、$a_{ij} = (a_{ipjq})_{pq}$, $a_{ipjq} = \lambda_0 \delta_{ip}\delta_{jq} + 2\mu_0(\delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$ (ただし定数 $\rho_0 > 0$ は弾性体の密度を表し、λ_0、μ_0 はラメ定数で、$3\lambda_0 + 2\mu_0 > 0$、$\mu_0 > 0$ をみたす) で、$\mathcal{N}_0(\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^3 \nu_i^0 a_{ij}\partial_{x_j}\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ (ただし $\nu^0 = {}^t(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) = (0,0,-1)$ は $\mathbf{R}^3_+$ の単位外向き法線ベクトル) である。

(1) の解は Dermenjian-Guillot [1] によって得られている一般化された固有関数展開を用いれば、速度 $c_P = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ の P 波と速度 $c_S =$

[1] joint work with Kawashita, Mishio and Soga, Hideo

$\sqrt{\mu_0/\rho_0}$ のS波の反射現象と Rayleigh 波に対応する波の重ね合わせによって表現されることが知られている。

Lax-Phillips [2] が与えた散乱理論は、散乱理論の中でも双曲型の方程式の性質を良く表したものと思われる。よって、(1) に対してもこの散乱論を構成したいと考える。Lax-Phillips 流散乱論において中心となるのは translation representation（平行移動表現）を構成することにあるといえる。そこで、まず自由な系 (1) に対する平行移動表現を構成する必要がある。全空間における波動方程式や弾性方程式の平行移動表現は Radon 変換を用いて表すことができるため (cf. [2], [4])、Lax-Phillips 流散乱論は概ね "Radon 変換による散乱論" という見方をされてきた。しかし、問題 (1) の場合は、Rayleigh 波を含めた表面波が存在するため、Radon 変換のみで平行移動表現を構成することは難しく、これまでこの方法では扱われてこなかった。一方、Wilcox [5] にあるように、波動方程式の散乱理論としてシュレディンガー方程式に対して展開された方法を踏襲する方法がある。(1) を自由な系とする散乱問題に対しては、Dermenjian-Guillot [1] によって極限吸収原理が示されている。この結果を用いると Wilcox 流散乱論は満足な形で展開できることがわかる。

これら二つの散乱理論において、どちらの方法で考えても、散乱状態を記述していると考えられる散乱作用素は本質的に同じものになる。しかしこれらの方法は一見して互いの関係がわかりにくく、従来は違ったものとして考えられていたように思われる。これらの関係について以下の事実がわかった。

定理 1 ([3]) 一般に、Wilcox 流と Lax-Phillips 流の散乱理論は互いに翻訳が可能であり、その関係は互いの散乱理論におけるスペクトル表現を通じてうつりあえる。

この関係に着目すれば、今まで困難に思われてきた (1) のような問題についても、比較的容易に散乱理論を展開することができる。

以下、(1) について Lax-Phillips 流散乱論を展開するための準備を行う。$\mathcal{H}_0 = L^2(\mathbf{R}^3_+; \mathbf{C}^3, \rho_0 d\mathbf{x})$ を $\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{H}_0} = \{\int_{\mathbf{R}^3_+} |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 \rho_0 d\,\mathbf{x}\}^{1/2}$ をノルムに持つ

ヒルベルト空間とする。$\mathcal{H}_0$ 上の $D(A_0)$ を定義域にもつ自己共役作用素 A_0 を以下で定義する。

$$\begin{aligned} A_0\mathbf{u} &= -\rho_0^{-1}\mathcal{A}_0(\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{u}, \\ D(A_0) &= \{\mathbf{u} \in H^2(\mathbf{R}^3_+;\mathbf{C}^3);\ \mathcal{N}_0(\partial_{\mathbf{x}})\mathbf{u} = 0\}. \end{aligned}$$

この作用素 A_0 に対して、以下の一般化された固有関数を導入する。これは、$\phi_0^P, \phi_0^{SV}, \phi_0^{SVO}, \phi_0^{SH}, \phi_0^R$ から構成され、各 $\alpha \in \Lambda' = \{P, SV, SVO, SH\}$ に対し、ϕ_0^α は入射波 $\phi_0^{\alpha,i}$ と反射波 (あるいは全反射) の和によって書かれている。この一般化された固有関数は、Dermenjian and Guillot [1] によって導入されたものを極座標表示しただけのもとは異なり、定義域を拡張し、更にユニタリー変換されている。一般化された固有関数に対するこれらの違いは、Wilcox の散乱論での固有関数展開としては重要性をもたないが、 Lax-Phillips の散乱論においては outgoing(incoming) subspace の性質の違いとして現れる。その意味で、良い平行移動表現を得ようとすると、このことが重要である。

以下、$S^2_P = S^2_{SH} = S^2_+ = \{\omega = {}^t(\omega', \omega_3) \in S^2;\ \omega_3 \geq 0\}$、$S^2_{SV} = \{\omega \in S^2_+;\ |\omega'| \leq \frac{c_S}{c_P}\}$、$S^2_{SVO} = \{\omega \in S^2_+;\ |\omega'| \geq \frac{c_S}{c_P}\}$、$S^2_R = \{\zeta \in \mathbf{R}^2;\ |\zeta| = 1\}$ とおき、$\phi_0^{\alpha,i} = \phi_0^{\alpha,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ $(\alpha \in \Lambda',\ \sigma \in \mathbf{R}, \omega \in S^2_\alpha)$ を次のように定義する。

$$\phi_0^{P,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) = e^{i\sigma c_P^{-1}\breve{\omega}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_P(\breve{\omega}),\ \phi_0^{SVO,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) = \frac{\Delta_+^{SVO}(\sigma,\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)}e^{i\sigma c_S^{-1}\breve{\omega}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\breve{\omega}),$$
$$\phi_0^{SV,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) = e^{i\sigma c_S^{-1}\breve{\omega}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\breve{\omega}),\quad \phi_0^{SH,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) = e^{i\sigma c_S^{-1}\breve{\omega}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SH}(\breve{\omega}),$$

ここで、$\breve{\omega} = {}^t(\omega_1, \omega_2, -\omega_3)$, $\omega' = {}^t(\omega_1, \omega_2)$, $\mathbf{a}_P(\xi) = \xi = {}^t(\xi', \xi_3)$, $\mathbf{a}_{SV}(\xi) = {}^t(-\dfrac{\xi_3}{|\xi'|}\xi', |\xi'|)$, $\mathbf{a}_{SH}(\xi) = \dfrac{1}{|\xi'|}{}^t(-\xi_2, \xi_1, 0)$,

$$\begin{aligned} \Delta_\pm^{SVO}(\sigma,\omega) &= (\frac{c_P}{c_S})^2\left(1 - 2|\omega'|^2\right)^2 \pm 4\frac{i\sigma}{|\sigma|}\frac{c_P}{c_S}|\omega'|^2\omega_3\eta(\omega), \\ \eta(\omega) &= \sqrt{(\frac{c_P}{c_S})^2|\omega'|^2 - 1}, \\ \Delta^{SVO}(\omega) &= |\Delta_\pm^{SVO}(\sigma,\omega)| = \sqrt{(\frac{c_P}{c_S})^4(1-2|\omega'|^2)^4 + 16(\frac{c_P}{c_S})^2|\omega'|^4\omega_3^2\eta(\omega)^2} \end{aligned}$$

$\phi_0^{\alpha,i}$ は入射波に対応している。次に、$\phi_0^{\alpha,r} = \phi_0^{\alpha,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}
\phi_0^{P,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= -\frac{\Delta_-^P(\omega)}{\Delta_+^P(\omega)} e^{i\sigma c_P^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_P(\omega) - \frac{\tilde{\Delta}^P(\omega)}{\Delta_+^P(\omega)} e^{i\sigma c_S^{-1}\xi^P(\omega)\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\xi^P(\omega)),\\
\phi_0^{SV,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= -\frac{\tilde{\Delta}^{SV}(\omega)}{\Delta_+^{SV}(\omega)} e^{i\sigma c_P^{-1}\xi^{SV}(\omega)\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_P(\xi^{SV}(\omega)) - \frac{\Delta_-^{SV}(\omega)}{\Delta_+^{SV}(\omega)} e^{i\sigma c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\omega),\\
\phi_0^{SH,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= e^{i\sigma c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SH}(\omega),\\
\phi_0^{SVO,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega) &= -\frac{\tilde{\Delta}^{SVO}(\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)} e^{i\sigma c_S^{-1}\omega'\cdot\mathbf{x}'} e^{-|\sigma|c_P^{-1}\eta(\omega)x_3}\mathbf{a}_P(\xi^{SVO}(\sigma,\omega))\\
&\qquad -\frac{\Delta_-^{SVO}(\sigma,\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)} e^{i\sigma c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}}\mathbf{a}_{SV}(\omega),
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= {}^t(x_1,x_2),\ \xi^P(\omega) = {}^t\left(\frac{c_S}{c_P}\omega',\xi_3^P(\omega)\right),\\
\xi^{SV}(\omega) &= {}^t\left(\frac{c_P}{c_S}\omega',\xi_3^{SV}(\omega)\right),\ \xi^{SVO}(\sigma,\omega) = {}^t\left(\frac{c_P}{c_S}\omega',\frac{i\sigma}{|\sigma|}\eta(\omega)\right),\\
\xi_3^P(\omega) &= \sqrt{1-(\frac{c_S}{c_P})^2|\omega'|^2},\ \xi_3^{SV}(\omega) = \sqrt{1-(\frac{c_P}{c_S})^2|\omega'|^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\pm^P(\omega) &= (\frac{c_P}{c_S})^2\left(1-2(\frac{c_S}{c_P})^2|\omega'|^2\right)^2 \pm 4\frac{c_S}{c_P}|\omega'|^2\omega_3\xi_3^P(\omega),\\
\Delta_\pm^{SV}(\omega) &= (\frac{c_P}{c_S})^2\left(1-2|\omega'|^2\right)^2 \pm 4\frac{c_P}{c_S}|\omega'|^2\omega_3\xi_3^{SV}(\omega),\\
\tilde{\Delta}^P(\omega) &= \frac{4c_S}{c_P}\omega_3|\omega'|((\frac{c_P}{c_S})^2-2|\omega'|^2),\\
\tilde{\Delta}^{SV}(\omega) &= \tilde{\Delta}^{SVO}(\omega) = -\frac{4c_P}{c_S}\omega_3|\omega'|(1-2|\omega'|^2).
\end{aligned}$$

$\phi_0^{\alpha,r}$ は反射波に対応している。

次のような A_0 に対する一般化された固有関数を導入する:

$$\begin{aligned}
&\phi_0^{\alpha}(\mathbf{x};\sigma,\omega) = \phi_0^{\alpha,i}(\mathbf{x};\sigma,\omega) + \phi_0^{\alpha,r}(\mathbf{x};\sigma,\omega) \qquad (\alpha\in\Lambda'),\\
&\phi_0^{R}(\mathbf{x};\sigma,\zeta) = \sqrt{2\pi\rho_0}C_0^R e^{i\sigma c_R^{-1}\zeta\cdot\mathbf{x}'}\sum_{j=1}^{2} C_j^R e^{-|\sigma|c_R^{-1}\xi_R^{(j)}x_3}\mathbf{a}_R^{(j)}(\sigma,\zeta).
\end{aligned}$$

ここで、$\xi_R^{(1)} = \sqrt{1-(c_R/c_P)^2}, \xi_R^{(2)} = \sqrt{1-(c_R/c_S)^2}, C_1^R = 2-(c_R/c_S)^2$, $C_2^R = -2\xi_R^{(1)}$, $\mathbf{a}_R^{(1)}(\sigma,\zeta) = {}^t(\zeta, \frac{i\sigma}{|\sigma|}\xi_R^{(1)})$, $\mathbf{a}_R^{(2)}(\sigma,\zeta) = {}^t(\xi_R^{(2)}\zeta, \frac{i\sigma}{|\sigma|})$. また、正定数 C_0^R は $|\sigma|(2\pi\rho_0 c_R)^{-1}\int_0^\infty |\phi_0^R(\mathbf{x};\sigma,\zeta)|^2 dx_3 = 1$ を満たすようにとる。このとき、C_0^R は c_P、c_S、c_R にのみ依存する。

この一般化された固有関数を用いて、Wilcox 流散乱論におけるスペクトル表現を構成する。$\langle\cdot\rangle^{-s_0}\mathcal{H}_0 = \{\mathbf{f} \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^3_+)\,;\,\langle\mathbf{x}\rangle^{s_0}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_0\}$ $(s_0 > 1/2)$ とする。ここで $\langle\mathbf{x}\rangle = (1+|\mathbf{x}|^2)^{1/2}$. $\mathbf{f} \in \langle\cdot\rangle^{-s_0}\mathcal{H}_0$ に対し、次を定義する。

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}^0_\alpha(\sigma)\mathbf{f})(\omega) &= \rho_0^{-1/2} c_\alpha^{-3/2}(-i\sigma)(\mathbf{f}, \phi_0^\alpha(\cdot;\sigma,\omega))_{\mathcal{H}_0} \qquad (\alpha \in \Lambda'),\\
(\mathcal{F}^0_R(\sigma)\mathbf{f})(\zeta) &= \rho_0^{-1/2} c_R^{-3/2}(-i\sigma)(\mathbf{f}, \phi_0^R(\cdot;\sigma,\zeta))_{\mathcal{H}_0}.
\end{aligned}
$$

このとき $\mathcal{F}^0_\alpha(\sigma)$ は $\sigma \in \mathbf{R}$ に対し、$\langle\cdot\rangle^{-s_0}\mathcal{H}_0$ から $L^2(S^2_\alpha)$ への有界作用素である。$\mathcal{F}^0(\sigma) = {}^t(\mathcal{F}^0_P(\sigma), \mathcal{F}^0_{SV}(\sigma), \mathcal{F}^0_{SVO}(\sigma), \mathcal{F}^0_{SH}(\sigma), \mathcal{F}^0_R(\sigma))$ とおく。そのとき、$\mathcal{F}^0(\sigma)$ は $N = \oplus_{\alpha\in\Lambda} L^2(S^2_\alpha)$ $(\Lambda = \Lambda' \cup \{R\})$ として、$B(\langle\cdot\rangle^{-s_0}\mathcal{H}_0, N)$ 値可測関数であり、 Wilcox 流散乱論におけるスペクトル表現である。これを用いれば、定理 1 の観点より平行移動表現 T_0 が Lax-Phillips 流散乱論におけるスペクトル表現 $\mathcal{T}_0$ を通して構成できる。

$A_0^{1/2}$ の定義域 $D(A_0^{1/2})$ を $D(A_0^{1/2}) \ni \mathbf{f}$ に対し $\|A_0^{1/2}\mathbf{f}\|$ をノルムとして完備化したものを $\mathcal{H}(A_0^{1/2})$ とする。(1) に対するエネルギー空間 H_0 を $H_0 = \mathcal{H}(A_0^{1/2}) \times \mathcal{H}_0$ で定義する。これはヒルベルト空間である。H_0 上のユニタリー群 $\{U_0(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ を、$U_0(t)\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{u}(t), \partial_t\mathbf{u}(t))$ で定義する。任意の $\vec{\mathbf{f}} \in \mathcal{Y}^0_{s_0} = \{\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)\,;\, \langle\mathbf{x}\rangle^{s_0}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \in H^1(\mathbf{R}^3_+),\ \mathbf{f}_2 \in \langle\cdot\rangle^{-s_0}\mathcal{H}_0\}$ $(s_0 \in \mathbf{R})$ に対し、$T_{0,\alpha}$ を次のようにおく：

$$
\begin{aligned}
T_{0,\alpha}\vec{\mathbf{f}}\,(s,\cdot) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-is\sigma}\mathcal{T}_{0,\alpha}\vec{\mathbf{f}}\,(\sigma,\cdot)\,d\sigma \quad (\alpha \in \Lambda),\\
\mathcal{T}_{0,\alpha}\vec{\mathbf{f}}\,(\sigma,\cdot) &= (2\pi)^{-1}\left\{i\sigma(\mathcal{F}^0_\alpha(-\sigma)\mathbf{f}_1)(\cdot) + (\mathcal{F}^0_\alpha(-\sigma)\mathbf{f}_2)(\cdot)\right\} \quad (\alpha \in \Lambda).
\end{aligned}
$$

$\mathcal{Y}^0_{s_0}(\subset D(A_0^{1/2}) \times \mathcal{H}_0)$ は H_0 で稠密なので $T_0 = {}^t(T_{0,P}, T_{0,SV}, T_{0,SVO}, T_{0,SH}, T_{0,R})$ は $\{U_0(t)\}$ の平行移動表現になる。すなわち次を得る。

定理 2 $\{U_0(t)\}$ に対し、次を満たす作用素 $T_0 : H_0 \to L^2(\mathbf{R}; N)$ が構成できる:

$$(2) \begin{cases} \left\| T_0 \vec{\mathbf{f}} \right\|^2_{L^2(\mathbf{R};N)} = 4(2\pi)^2 \left\| \vec{\mathbf{f}} \right\|^2_{H_0}, \\ T_0 \text{ は全射。} \end{cases}$$

$$(3)\, (T_0 U_0(t) \vec{\mathbf{f}})(s) = (T_0 \vec{\mathbf{f}})(s-t) \quad (\text{ 全ての } \vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \in H_0 \text{ について}).$$

定理2にある T_0 の各成分は波の反射や表面波などに対応している。例えば $T_{0,R}$ は Rayleigh 波に対応する成分、$T_{0,SVO}$ は全反射現象に対応した成分を表す。またその他は波の通常の反射現象から来る成分を表している。ここで、$\mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ は普通の $\mathbf{R}^3$ での急減少シュワルツ関数を $\mathbf{R}^3_+$ に制限した関数からなる空間とし、$\widetilde{\mathcal{S}}_0 = \{\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)\,;\, \mathbf{f}_j \in \mathcal{S}(\overline{\mathbf{R}^3_+})\}$ とする。このとき、$\vec{\mathbf{f}} = {}^t(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$ に対し、それぞれ次のように具体的に表現される。

$$\begin{aligned}
T_{0,P}\vec{\mathbf{f}}(s,\omega) &= (c_P\rho_0)^{1/2} \Big[\mathbf{a}_P(\breve{\omega}) \cdot (\mathcal{R}_P \vec{\mathbf{f}})(c_P s, \breve{\omega}) \\
&\quad - \frac{\Delta^P_-(\omega)}{\Delta^P_+(\omega)} \mathbf{a}_P(\omega) \cdot (\mathcal{R}_P \vec{\mathbf{f}})(c_P s, \omega) \\
&\quad - \frac{c_S^2}{c_P^2} \frac{\tilde{\Delta}^P(\omega)}{\Delta^P_+(\omega)} \mathbf{a}_{SV}(\xi^P(\omega)) \cdot (\mathcal{R}_S \vec{\mathbf{f}})(c_S s, \xi^P(\omega)) \Big], \\
T_{0,SV}\vec{\mathbf{f}}(s,\omega) &= (c_S\rho_0)^{1/2} \Big[\mathbf{a}_{SV}(\breve{\omega}) \cdot (\mathcal{R}_S \vec{\mathbf{f}})(c_S s, \breve{\omega}) \\
&\quad - \frac{\Delta^{SV}_-(\omega)}{\Delta^{SV}_+(\omega)} \mathbf{a}_{SV}(\omega) \cdot (\mathcal{R}_S \vec{\mathbf{f}})(c_S s, \omega) \\
&\quad - \frac{c_P^2}{c_S^2} \frac{\tilde{\Delta}^{SV}(\omega)}{\Delta^{SV}_+(\omega)} \mathbf{a}_P(\xi^{SV}(\omega)) \cdot (\mathcal{R}_P \vec{\mathbf{f}})(c_P s, \xi^{SV}(\omega)) \Big], \\
T_{0,SH}\vec{\mathbf{f}}(s,\omega) &= (c_S\rho_0)^{1/2} \Big\{ \mathbf{a}_{SH}(\breve{\omega}) \cdot (\mathcal{R}_S \vec{\mathbf{f}})(c_S s, \breve{\omega}) \\
&\qquad\qquad + \mathbf{a}_{SH}(\omega) \cdot (\mathcal{R}_S \vec{\mathbf{f}})(c_S s, \omega) \Big\}, \\
T_{0,SVO}\vec{\mathbf{f}}(s,\omega) &= (c_S\rho_0)^{1/2} \Big[\frac{(c_P/c_S)^2(1-2|\omega'|^2)^2}{\Delta^{SVO}(\omega)} \\
&\quad \Big\{ \mathbf{a}_{SV}(\breve{\omega}) \cdot (\mathcal{R}_S \vec{\mathbf{f}})(c_S s, \breve{\omega}) \mathbf{a}_{SV}(\omega) \cdot (\mathcal{R}_S \vec{\mathbf{f}})(c_S s, \omega) \Big\} \\
&+ \frac{4(c_P/c_S)|\omega'|^2 \omega_3 \eta(\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)} \Big\{ \mathbf{a}_{SV}(\breve{\omega}) \cdot (\kappa(D_s)\mathcal{R}_S \vec{\mathbf{f}})(c_S s, \breve{\omega})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad + \mathbf{a}_{SV}(\omega) \cdot (\kappa(D_s)\mathcal{R}_S\vec{\mathbf{f}})(c_S s, \omega)\Big\}\\
&- \frac{c_P^2}{c_S^2}\frac{\tilde{\Delta}^{SVO}(\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)}\left\{\begin{pmatrix} \frac{c_P}{c_S}\omega' \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\widetilde{\mathcal{R}}_P^+\vec{\mathbf{f}})(c_P s, \frac{c_P}{c_S}\omega', \eta(\omega))\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \begin{pmatrix} 0 \\ \eta(\omega) \end{pmatrix} \cdot (\widetilde{\mathcal{R}}_P^-\vec{\mathbf{f}})(c_P s, \frac{c_P}{c_S}\omega', \eta(\omega))\right\}\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{0,R}\vec{\mathbf{f}}(s,\zeta) &= (c_R\rho_0)^{1/2}\sqrt{2\pi\rho_0}C_R^0\sum_{j=1}^{2}\left\{C_{j,R}^{(1)}\begin{pmatrix}\zeta\\0\end{pmatrix}\cdot(\widetilde{\mathcal{R}}_R^+\vec{\mathbf{f}})(c_R s,\zeta,\xi_R^{(j)})\right.\\
&\qquad \left. + C_{j,R}^{(2)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot(\widetilde{\mathcal{R}}_R^-\vec{\mathbf{f}})(c_R s,\zeta,\xi_R^{(j)})\right\}.
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathcal{R}_\alpha$ と $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha^\pm$ は以下で定義される：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R}_\alpha\vec{g}(s,\xi) = c_\alpha\partial_s^2\mathcal{R}^0\mathbf{g}_1(s,\xi) - \partial_s\mathcal{R}^0\mathbf{g}_2(s,\xi) \quad (\alpha = P, S),\\
&\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha^\pm\vec{g}(s,\xi',\xi_3) = c_\alpha\partial_s^2\widetilde{\mathcal{R}}_\pm^0\mathbf{g}_1(s,\xi',\xi_3) - \partial_s\widetilde{\mathcal{R}}_\pm^0\mathbf{g}_2(s,\xi',\xi_3) \quad (\alpha = S, R).
\end{aligned}
$$

ここで、$\mathcal{R}^0\mathbf{h}(s,\xi) = \int_{\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}_+^3;\,\mathbf{x}\cdot\xi=s\}}\mathbf{h}(\mathbf{x})\,dS_\mathbf{x}$ は普通の Radon 変換で

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{R}}_+^0\mathbf{h}(s,\xi',\xi_3) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}_+^3}\frac{\xi_3 x_3}{(\xi_3 x_3)^2 + (\xi'\cdot\mathbf{x}'-s)^2}\mathbf{h}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\\
\widetilde{\mathcal{R}}_-^0\mathbf{h}(s,\xi',\xi_3) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}_+^3}\frac{s-\xi'\cdot\mathbf{x}'}{(\xi_3 x_3)^2 + (\xi'\cdot\mathbf{x}'-s)^2}\mathbf{h}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}
\end{aligned}
$$

によって定義される。このように、表面波に対応する部分以外の平行移動表現は Radon 変換によってかかれている。しかし、S 波の反射によって生じる evanescent 波や Rayleigh 波といった表面波に対応する部分は Radon 変換ではない $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha^\pm$ によって表されている。

定理 2 において平行移動表現が得られたので、これを用いて解を表現する。(1) の解において $U_{0,P}(t) = U_0(t)(T_0)^{-1}\,{}^t(T_{0,P},0,0,0,0)$ は P 波の反射現象の成分を、$U_{0,SVO}(t) = U_0(t)(T_0)^{-1}\,{}^t(0,0,T_{0,SVO},0,0)$ は全反射現象の成分を、$U_{0,R}(t) = U_0(t)(T_0)^{-1}\,{}^t(0,0,0,0,T_{0,R})$ は Rayleigh 波の成分を取り出しているものと解釈できる。他の波の成分も同様にして定めることができる。各 $\alpha\in\Lambda$ に対し、$U_{0,\alpha}(t)\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = -\frac{(c_\alpha^3\rho_0)^{-1/2}}{2(2\pi)^2}\,{}^t(\mathbf{u}_{\alpha,1}, -\mathbf{u}_{\alpha,2})$ $(c_{SV} = c_{SVO} = c_{SH} = c_S)$ で $\mathbf{u}_{\alpha,l}(t,\mathbf{x})$ を定める。このとき、$\mathbf{u}_{\alpha,l}(t,\mathbf{x})$

$(l=1,2)$ は平行移動表現を用いて以下のように表現できる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_{P,l}(t,\mathbf{x}) &= \int_{S_P^2}\Big\{\mathbf{a}_P(\breve{\omega})\left(\partial_s^{l-1}T_{0,P}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_P^{-1}\breve{\omega}\cdot\mathbf{x}-t,\omega) \\
&\quad -\frac{\Delta_-^P(\omega)}{\Delta_+^P(\omega)}\mathbf{a}_P(\omega)\left(\partial_s^{l-1}T_{0,P}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_P^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}-t,\omega) \\
&\quad -\frac{\tilde{\Delta}^P(\omega)}{\Delta_+^P(\omega)}\mathbf{a}_{SV}(\xi^P(\omega))\left(\partial_s^{l-1}T_{0,P}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_S^{-1}\xi^P(\omega)\cdot\mathbf{x}-t,\omega)\Big\}\,dS_\omega, \\
\mathbf{u}_{SV,l}(t,\mathbf{x}) &= \int_{S_{SV}^2}\Big\{\mathbf{a}_{SV}(\breve{\omega})\left(\partial_s^{l-1}T_{0,SV}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_S^{-1}\breve{\omega}\cdot\mathbf{x}-t,\omega) \\
&\quad -\frac{\tilde{\Delta}^{SV}(\omega)}{\Delta_+^{SV}(\omega)}\mathbf{a}_P(\xi^{SV}(\omega))\left(\partial_s^{l-1}T_{0,SV}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_P^{-1}\xi^{SV}(\omega)\cdot\mathbf{x}-t,\omega) \\
&\quad -\frac{\Delta_-^{SV}(\omega)}{\Delta_+^{SV}(\omega)}\mathbf{a}_{SV}(\omega)\left(\partial_s^{l-1}T_{0,SV}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}-t,\omega)\Big\}\,dS_\omega, \\
\mathbf{u}_{SVO,l}(t,\mathbf{x}) &= \int_{S_{SVO}^2}\Bigg[\frac{(c_P/c_S)^2(1-2|\omega'|^2)^2}{\Delta^{SVO}(\omega)} \\
&\qquad \Big\{\mathbf{a}_{SV}(\breve{\omega})\left(\partial_s^{l-1}T_{0,SVO}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_S^{-1}\breve{\omega}\cdot\mathbf{x}-t,\omega) \\
&\qquad -\mathbf{a}_{SV}(\omega)\left(\partial_s^{l-1}T_{0,SVO}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}-t,\omega)\Big\} \\
&\quad -\frac{4(c_P/c_S)|\omega'|^2\omega_3\eta(\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)}\Big\{ \\
&\qquad \mathbf{a}_{SV}(\breve{\omega})\left(\kappa(D_s)\partial_s^{l-1}T_{0,SVO}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_S^{-1}\breve{\omega}\cdot\mathbf{x}-t,\omega) \\
&\qquad +\mathbf{a}_{SV}(\omega)\left(\kappa(D_s)\partial_s^{l-1}T_{0,SVO}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}-t,\omega)\Big\} \\
&\quad -\ \frac{\tilde{\Delta}^{SVO}(\omega)}{\Delta^{SVO}(\omega)}\Big\{\begin{pmatrix}\frac{c_P}{c_S}\omega' \\ 0\end{pmatrix}\int_{\mathbf{R}}K_S^+(t+s;\mathbf{x},\omega)\partial_s^{l-1}T_{0,SVO}\vec{\mathbf{f}}(s,\omega)d\,s \\
&\qquad -\begin{pmatrix}0 \\ \eta(\omega)\end{pmatrix}\int_{\mathbf{R}}K_S^-(t+s;\mathbf{x},\omega)\partial_s^{l-1}T_{0,SVO}\vec{\mathbf{f}}(s,\omega)d\,s\Big\}\Bigg]\,d\,S_\omega, \\
\mathbf{u}_{SH,l}(t,\mathbf{x}) &= \int_{S_{SH}^2}\mathbf{a}_{SH}(\omega)\Big\{\left(\partial_s^{l-1}T_{0,SH}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_S^{-1}\breve{\omega}\cdot\mathbf{x}-t,\omega) \\
&\qquad +\left(\partial_s^{l-1}T_{0,SH}\vec{\mathbf{f}}\right)(c_S^{-1}\omega\cdot\mathbf{x}-t,\omega)\Big\}\,dS_\omega, \\
\mathbf{u}_{R,l}(t,\mathbf{x}) &= \sqrt{2\pi\rho_0}C_0^R\Big\{\sum_{j=1}^{2}C_{j,R}^+\int_{S_R^2}\begin{pmatrix}\zeta \\ 0\end{pmatrix} \\
&\qquad \int_{\mathbf{R}}K_{R,j}^+(t+s;\mathbf{x},\zeta)\partial_s^{l-1}T_{0,R}\vec{\mathbf{f}}(s,\zeta)dsdS_\zeta
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{j=1}^{2} C_{j,R}^{-} \int_{S_R^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_{\mathbf{R}} K_{R,j}^{-}(t+s;\mathbf{x},\zeta)\partial_s^{l-1} T_{0,R}\vec{\mathbf{f}}\,(s,\zeta)ds dS_\zeta \Bigg\}$$

ここで $C_{1,R}^{+} = C_1^R$, $C_{2,R}^{+} = -2\xi_R^{(1)}\xi_R^{(2)}$, $C_{1,R}^{-} = -C_1^R\xi_R^{(1)}$, $C_{2,R}^{-} = 2\xi_R^{(1)}$,
$K_S^{\pm}(s;\mathbf{x},\omega) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{X_S^{\pm}}{(X_S^{+})^2 + (X_S^{-})^2}$, $\qquad K_{R,j}^{\pm}(s;\mathbf{x},\zeta) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{X_{R,j}^{\pm}}{(X_{R,j}^{+})^2 + (X_{R,j}^{-})^2}$,
$X_S^{+} = c_P^{-1}\eta(\omega)x_3$, $X_S^{-} = c_S^{-1}\omega'\cdot\mathbf{x}' - s$, $X_{R,j}^{+} = c_R^{-1}\xi_R^{(j)}x_3$, $X_{R,j}^{-} = c_R^{-1}\zeta\cdot\mathbf{x}' - s$.
また、$\kappa(\sigma) = -i\sigma/|\sigma|$ (つまり $\kappa(D_s)k(s)(= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\int_{|s-s'|\geq\epsilon}\frac{1}{s-s'}k(s')\,ds')$ はヒルベルト変換である)。

上の平行移動表現による解の表現式から outgoing(incomimg) subspace の特徴付けが得られる。外部領域の場合に習って $D_{\pm}^{0}$ を $T_0(D_{\pm}^{0}) = \{k \in L^2(\mathbf{R};\oplus_{\alpha\in\Lambda}L^2(S_\alpha^2))\,;\, \pm s < 0$ のとき $k(s) = 0$ が成り立つ$\}$ で定めると、この閉部分空間は outgoing(incomimg) subspace であることがわかる。この $D_{\pm}^{0}$ について次のような特徴付けを得る。

定理 3 $\vec{\mathbf{f}} \in H_0$ が $D_{\pm}^{0}$ に属するということは、任意の $\pm t > 0$ に対して以下の (4) と (5) が成り立つことと同値である：

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{supp}\mathcal{P}\left[(U_0(t) - U_{0,SR}(t))\vec{\mathbf{f}}\right]_1 \subset \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}_+^3\,;\,\pm c_S t < |\mathbf{x}|\},$$

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{supp}\mathcal{P}\left[U_0(t)\vec{\mathbf{f}}\right]_1\Big|_{x_3=0} \subset \{\mathbf{x}'\in\partial\mathbf{R}_+^3\,;\,\pm c_R t < |\mathbf{x}'|\}$$

ここで、$U_{0,SR}(t) = U_{0,SVO}(t) + U_{0,R}(t)$, $\mathcal{P}^t(u_1,u_2,u_3) = {}^t(u_1,u_2)$。

この定理 は、Dermenjian and Guillot [1] の一般化された固有関数展開に対して直接に定理 1 を適用しても得られないことに注意したい。全空間の場合は $D_{\pm}^{0} = \{\vec{\mathbf{f}} \in H_0\,;\, U_0(t)\vec{\mathbf{f}} = 0 \text{ in } |x| \leq \pm c_S t\}$ と特徴付けられるが、半空間の場合の $D_{\pm}^{0}$ はこのような性質を持たない。これは Rayleigh 波や evanescent 波といった表面波が存在することに起因する。実際、次が示せる。

命題 4 任意の $\vec{\mathbf{f}} \in H_0$ に対して、以下の (a) と (b) は互いに同値である：

(a) 任意の $\pm t > 0$ に対し $\operatorname{supp} U_0(t)\vec{\mathbf{f}} \subset \{\mathbf{x}\in\mathbf{R}_+^3\,;\,\pm c_R t < |\mathbf{x}|\}$.

(b) 任意の $\vec{\mathbf{f}} \in D_{\pm}^{0}$に対し $T_{0,SVO}\vec{\mathbf{f}} = 0$ かつ $T_{0,R}\vec{\mathbf{f}} = 0$.

この命題から、$|\mathbf{x}| \leq \pm c_R t$ において $U_0(t)\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = 0$ が成り立つという状況下では、表面波が存在し得ないということがわかる。よって次の定理が得られる。

定理 5 半空間の場合の (1) に対しては、$D^0_\pm$ が上で述べた全空間の時の様な特徴付け、すなわち $D^0_\pm = \{\vec{\mathbf{f}} \in H_0\,;\, U_0(t)\vec{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = 0 \text{ in } |\mathbf{x}| \leq \pm c_R t\}$ を持つような平行移動表現は存在しない。

参考文献

[1] Dermenjian, Y. and Guillot, J. C., Math. Meth. in the Appl. Sci. **10** (1988), 87–124

[2] Lax and Phillips, "Scattering theory" Academic Press, New York, 1966.

[3] Kawashita, M., Kawashita, W. and Soga, H., Seminar Notes of Mathematical Sciences, Ibaraki University **4** (2001), 40-49.

[4] Shibata, Y. and Soga, H., RIMS Kyoto Univ. **25** (1989), 861–887.

[5] Wilcox, C. H., Lect. Notes in Math., no. 442, Springer, Berlin, 1975.